



مهدی شاکریان
shakeran.com

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: مثلثات دهم قلم چی دو سال اخیر

① شخصی در فاصله ۶ متری برجی قرار دارد که دکلی به ارتفاع ۱۲ متر بالای آن نصب شده است. مقدار مسافتی که لازم است شخص به عقب جابه‌جا شود تا ابتدا و انتهای دکل را به‌ترتیب با زوایای 45° و 60° مشاهده کند، چند متر است؟ $(\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2})$

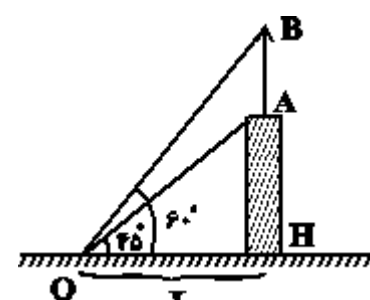
- (۲) $6\sqrt{3}$
(۴) $6\sqrt{3} + 12$

- (۱) $2\sqrt{3}$
(۳) $6\sqrt{3} + 6$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

با رسم شکل برای موقعیت نهایی فرد داریم:



$$\triangle OAH : \tan 45^\circ = \frac{AH}{x} = 1 \Rightarrow AH = x$$

$$\triangle OBH : \tan 60^\circ = \frac{BH}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow BH = x\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AB = x\sqrt{3} - x = x(\sqrt{3} - 1) = 12$$

$$\Rightarrow x = \frac{12}{\sqrt{3} - 1} = 6(\sqrt{3} + 1)$$

$$\text{مقدار جابه‌جایی} = 6(\sqrt{3} + 1) - 6 = 6\sqrt{3}$$

۲) بالنی را با دو طناب به زمین بسته‌اند. اگر طول یک طناب برابر ۴۰ متر باشد و با سطح زمین زاویه ۶۰ درجه ساخته باشد و طناب دوم با سطح زمین زاویه ۴۵° ساخته باشد در این صورت طول طناب دوم چند متر است؟

۲۰ (۴)

۲۰√۶ (۳)

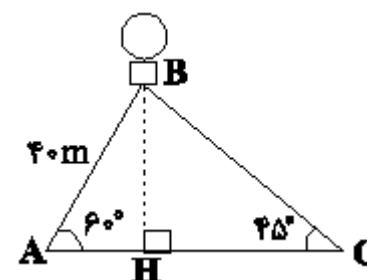
۲۰√۲ (۲)

۲۰√۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

ارتفاع BH را رسم می‌کنیم در این صورت:

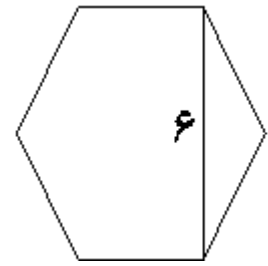


$$\sin \hat{A} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{BH}{40}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{40} \Rightarrow BH = 20\sqrt{3}$$

$$\sin \hat{C} = \frac{BH}{BC} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{3}}{BC} \Rightarrow BC = 20\sqrt{6}$$

۳) مساحت شش ضلعی منتظم زیر کدام است؟

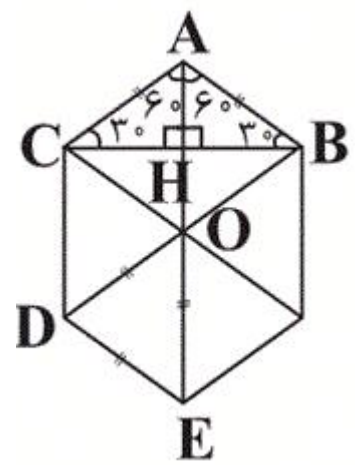


- (۱) $9\sqrt{3}$
- (۲) $12\sqrt{3}$
- (۳) $18\sqrt{3}$
- (۴) $24\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

با توجه به شکل داریم:



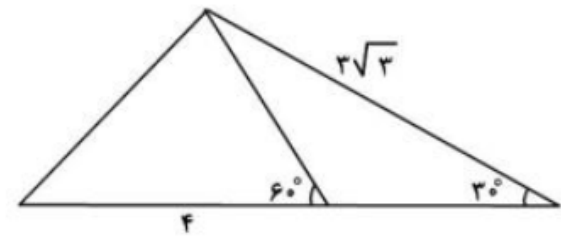
$$\cos 30^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{BC}{2AB}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{2AB} \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}$$

از طرف دیگر هر شش ضلعی منتظم از شش مثلث متساوی الاضلاع تشکیل شده است. بنابراین:

$$S = 6 \times \left(\frac{1}{2} \times AB^2 \times \sin 60^\circ \right) = 3 \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$$

۴) مساحت بزرگترین مثلث در شکل زیر، چند واحد مربع است؟

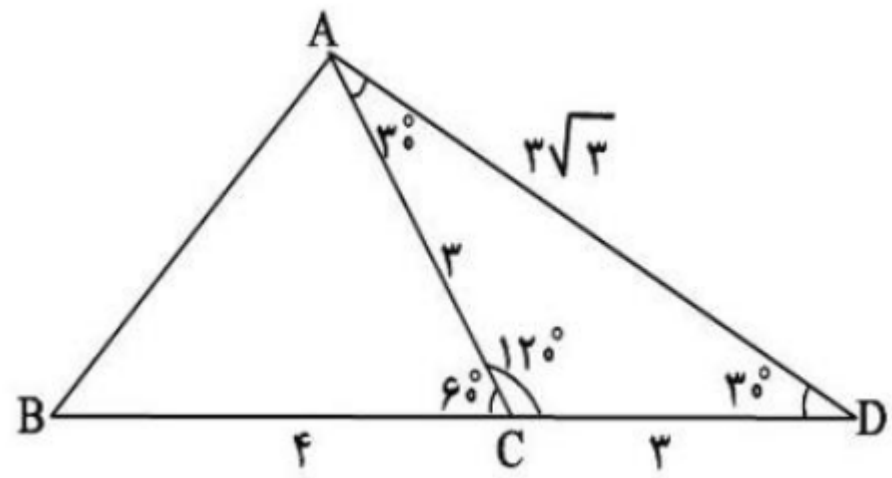


- (۱) $\frac{21}{4}$
 (۲) $\frac{21\sqrt{3}}{4}$
 (۳) $\frac{21\sqrt{2}}{8}$
 (۴) $21\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

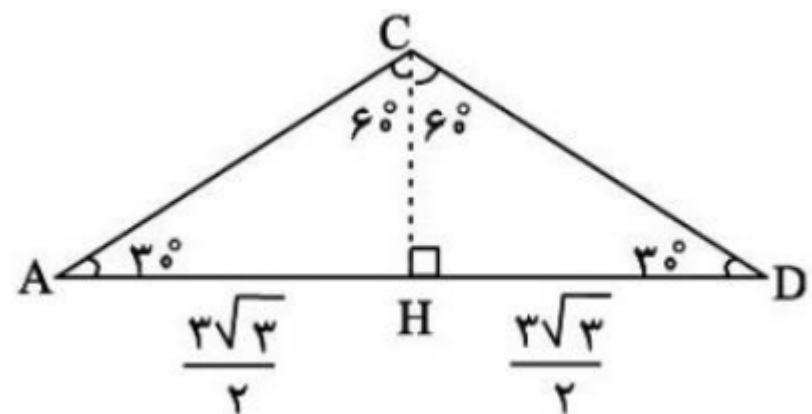
با توجه به اینکه مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است، شکل را به صورت زیر تکمیل می‌کنیم، داریم:



$$S_{ABD} = S_{ABC} + S_{ACD}$$

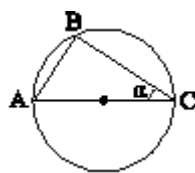
$$\frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times 3 \times 3\sqrt{3} \times \sin 30^\circ = \frac{21\sqrt{3}}{4}$$

توجه کنید که با توجه به شکل زیر، $AC = CD = 3$



$$\Rightarrow \cos 30^\circ = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = 3$$

⑤ در شکل زیر، اگر مساحت مثلث ABC برابر ۲۴ واحد مربع، $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ و AC قطر دایره باشد، مساحت دایره چند واحد مربع است؟



(۲) 100π

(۴) 36π

(۱) 25π

(۳) 64π

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

رأس B، روی دایره و مقابل قطر آن قرار دارد، بنابراین $\widehat{B} = 90^\circ$ است. در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$\tan \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow AB = \frac{3}{4}BC \quad (*)$$

از طرفی:

$$\text{مساحت مثلث ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times BC = 24$$

$$\Rightarrow AB \times BC = 48 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \frac{3}{4}BC \times BC = 48$$

$$\Rightarrow BC = 8 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} AB = 6$$

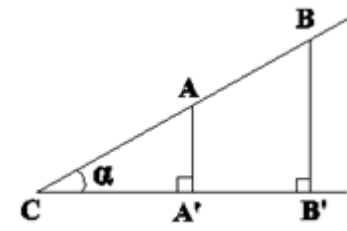
با استفاده از رابطه فیثاغورس در مثلث ABC خواهیم داشت:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow 6^2 + 8^2 = AC^2 \Rightarrow AC = 10$$

$$\Rightarrow R = 5$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi R^2 = 25\pi$$

۶) در شکل زیر، $BB' = 3AA'$ و $CB' = 2CA$ است. حاصل $\sin \alpha + \cos \alpha$ کدام است؟



- (۱) $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$
 (۲) $\frac{2+\sqrt{5}}{3}$
 (۳) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$
 (۴) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

دو مثلث $CA'A$ و $CB'B$ متشابه‌اند. بنابراین:

$$\frac{BB'}{AA'} = \frac{CB'}{CA'} = \frac{CB}{CA} = 3, \quad CB' = 2CA$$

$$\cos \alpha = \frac{CA'}{CA} = \frac{CA'}{\frac{1}{3}CB'} = \frac{2}{3}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2+\sqrt{5}}{3}$$

۷) مساحت متوازی‌الاضلاعی که یکی از قطرهای آن ۳ برابر دیگری است، برابر $48\sqrt{3}$ می‌باشد. اگر زاویه بین دو قطر 60° باشد، اندازه قطر بزرگ‌تر چقدر است؟

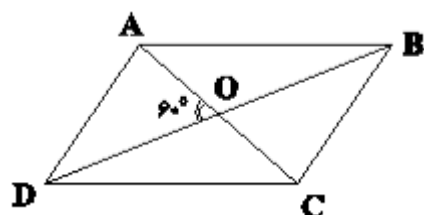
۱) ۱۲

۲) ۴

۳) ۸

۴) ۲۴

پاسخ: گزینه ۴



$$BD = 3AC$$

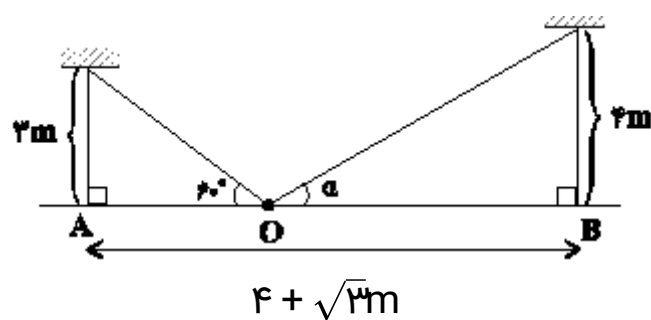
$$S_{\text{متوازی‌الاضلاع}} = 4S_{\triangle AOD} = 4 \times \frac{1}{2} \times AO \times DO \times \sin 60^\circ$$

$$= 2 \times \frac{AC}{2} \times \frac{BD}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 48\sqrt{3} \Rightarrow \frac{AC \times 3AC \times \sqrt{3}}{4} = 48\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AC = 8, BD = 24$$

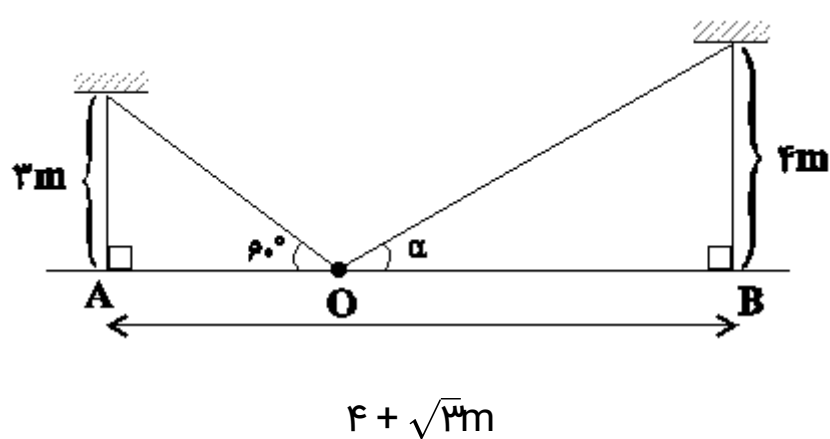
نکته: قطرهای متوازی‌الاضلاع، متوازی‌الاضلاع را به چهار مثلث هم مساحت، تقسیم می‌کنند.

۸) دو تیرچراغ برق به ارتفاع‌های ۳ و ۴ متر در فاصله‌ای برابر $۴ + \sqrt{۳}$ متر از هم قرار دارند. اگر سیم متصل به تیر چراغ برق کوچک‌تر با افق، زاویه ۶۰° بسازد، زاویه سیم متصل به تیر چراغ برق بزرگ‌تر با افق چند درجه است؟
 $(\cot ۱۵^\circ \approx ۲/۱۵\sqrt{۳})$



- ۱) ۱۵°
- ۲) ۳۰°
- ۳) ۴۵°
- ۴) ۶۰°

پاسخ: گزینه ۳



$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} = \frac{3}{OA} \Rightarrow OA = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}m$$

$$\Rightarrow OB = 4m \Rightarrow \tan \alpha = \frac{4}{\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

۹) کدامیک از گزینه‌های زیر، معادله خطی را نشان می‌دهد که با جهت مثبت محور x ها، زاویه 45° می‌سازد و از نقطه $(0, -3)$ نیز عبور می‌کند؟

$$2y - 2x = -6 \quad (2)$$

$$y - \sqrt{2}x = -3 \quad (4)$$

$$y - x = 3 \quad (1)$$

$$2y - \sqrt{2}x = -6 \quad (3)$$

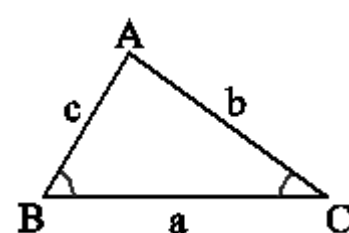
پاسخ: گزینه ۲

$$m = \tan 45^\circ = 1 = \text{شیب خط}$$

$$y = mx + b = x + b \xrightarrow{(0, -3)} b = -3$$

$$\Rightarrow y = x - 3 \Rightarrow 2y - 2x = -6$$

۱۰) در مثلث ABC زیر، اندازه ضلع a برابر کدام است؟



$$b \sin \hat{C} + c \sin \hat{B} \quad (1)$$

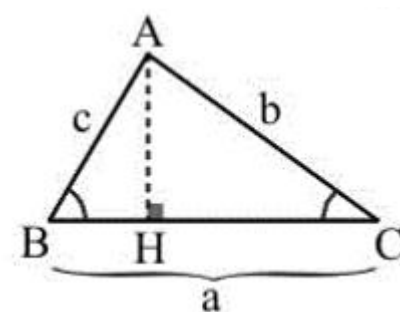
$$b \cos \hat{C} + c \cos \hat{B} \quad (2)$$

$$b \tan \hat{C} + c \tan \hat{B} \quad (3)$$

$$b \cot \hat{C} + c \cot \hat{B} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۲

در شکل زیر با رسم ارتفاع وارد بر ضلع BC خواهیم داشت:



$$BC = BH + HC$$

$$\Rightarrow a = BH + HC$$

از طرفی در مثلث‌های قائم‌الزاویه ABH و AHC داریم:

$$\triangle ABH : \cos \hat{B} = \frac{BH}{c} \Rightarrow BH = c \cos \hat{B}$$

$$\triangle AHC : \cos \hat{C} = \frac{HC}{b} \Rightarrow HC = b \cos \hat{C}$$

$$a = c \cos \hat{B} + b \cos \hat{C} \quad \text{در نتیجه:}$$

۱۱) نقطه P به عرض $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ روی دایره مثلثاتی و در ناحیه چهارم قرار دارد. اگر θ زاویه بین نیم‌خط $\overrightarrow{OP}$ با محور $\overrightarrow{OX}$ در جهت مثلثاتی باشد، حاصل عبارت $A = 2 \sin \theta + \sqrt{3} \tan \theta$ کدام است؟ (O مرکز دایره مثلثاتی است.)

(۲) ۲-

(۱) ۲

(۴) ۱

(۳) -۱

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

اگر (x, y) روی دایره مثلثاتی باشد، خواهیم داشت:

$$x^2 + y^2 = 1, \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$$

با توجه به اینکه نقطه $(x, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ روی دایره مثلثاتی قرار دارد، خواهیم داشت:

$$x^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

که $x = +\frac{\sqrt{3}}{2}$ قابل قبول است زیرا نقطه P در ناحیه چهارم است:

$$\sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \tan \theta = \frac{y}{x} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$A = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \sqrt{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$A = -1 - 1 = -2$$

۱۲) اگر $۳۰^{\circ} < \alpha < ۱۲۰^{\circ}$ و داشته باشیم $\cos \alpha = \frac{m-1}{3}$ ، آنگاه چند مقدار صحیح برای m یافت می‌شود؟

۱ (۴)

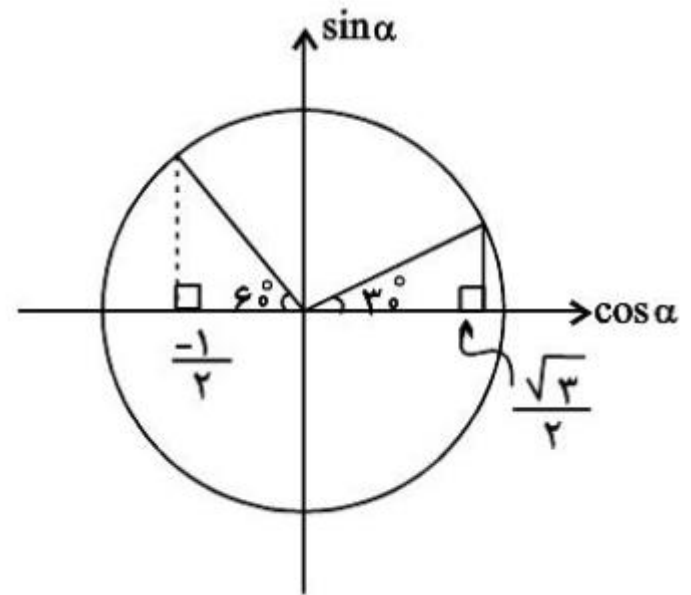
۲ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»



با توجه به دایره مثلثاتی اگر $۳۰^{\circ} < \alpha < ۱۲۰^{\circ}$ ، آنگاه $-\frac{1}{2} < \cos \alpha < \frac{\sqrt{3}}{2}$ ؛ محدوده m را به دست می‌آوریم:

$$-\frac{1}{2} < \frac{m-1}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\times 6} -3 < 2m - 1 < 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow -1 < 2m < 2 + 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < m < \frac{2+3\sqrt{3}}{2}$$

با توجه به اینکه $\sqrt{3} \approx ۱/۷$ ، مقادیر صحیح m در بازه

$(-۰/۵, ۳/۵۵)$ قرار دارند، پس $m = ۰$ ، $m = ۱$ ، $m = ۲$ و $m = ۳$ قابل قبول است.

۱۳) انتهای کمان α در کدام ناحیه مثلثاتی باشد تا روابط $\sin \alpha \cos \alpha < 0$ و $\sin \alpha \tan \alpha > 0$ همزمان برقرار باشند؟

- (۱) فقط دوم (۲) فقط سوم (۳) فقط چهارم (۴) دوم یا سوم

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

علامت نسبت‌های مثلثاتی α در نواحی مختلف مطابق جدول زیر است:

	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\sin \alpha \cos \alpha < 0$	x	✓	x	✓
$\tan \alpha \sin \alpha > 0$	✓	x	x	✓

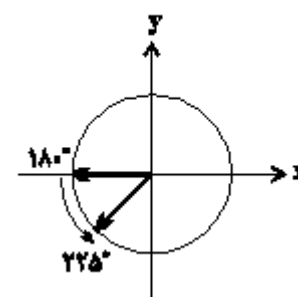
جواب ربع چهارم است.

۱۴) اگر زاویه θ از 180° تا 225° افزایش یابد، کدامیک از عبارات زیر درست است؟

- (۱) همواره مقدار $\sin \theta$ از مقدار $\cos \theta$ بیش‌تر است.
 (۲) مقدار $\cos \theta$ ابتدا افزایش سپس کاهش می‌یابد.
 (۳) مقدار $\sin \theta$ همواره افزایش می‌یابد.
 (۴) همواره $\cos \theta > \cot \theta$ است.

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»



در این ناحیه، $\cos \theta < \sin \theta < 0$ است.

مقدار $\cos \theta$ همواره افزایش می‌یابد.

مقدار $\sin \theta$ همواره کاهش می‌یابد.

در این ناحیه $\cot \theta > 0$ است، بنابراین همواره $\cos \theta < \cot \theta$ می‌باشد.

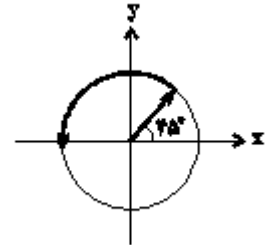
۱۵) اگر $۴۵^{\circ} < \alpha < ۱۸۰^{\circ}$ و $\sin \alpha = \frac{5m+1}{3}$ باشد، حدود m کدام است؟

(۲) $(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}]$
(۴) $(-\frac{1}{5}, \frac{3\sqrt{2}-2}{10})$

(۱) $[-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}]$
(۳) $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}]$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»



با توجه به دایره مثلثاتی داریم:

$$0 < \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow 0 < \frac{5m+1}{3} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 < 5m+1 \leq 3 \Rightarrow -1 < 5m \leq 2 \Rightarrow -\frac{1}{5} < m \leq \frac{2}{5}$$

۱۶) اگر $۲۷۰^{\circ} < \alpha < ۳۶۰^{\circ}$ ؛ آنگاه حاصل عبارت $A = \sin \alpha - \sqrt{\cot^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$ کدام است؟

(4) $-\frac{1}{\tan \alpha}$

(3) $\frac{1}{\tan \alpha}$

(2) $-\frac{1}{\cos \alpha}$

(1) $\frac{1}{\sin \alpha}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

با استفاده از اتحادهای مثلثاتی $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ و $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha$ داریم:

$$\cot^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \cos^2 \alpha$$

$$= \cos^2 \alpha \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 \right) = \cos^2 \alpha (1 + \cot^2 \alpha - 1) = \cos^2 \alpha \cot^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \sin \alpha - \sqrt{\cot^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \sin \alpha - \sqrt{\cot^2 \alpha \cos^2 \alpha}$$

$$= \sin \alpha - |\cot \alpha \cos \alpha| = \sin \alpha - \left| \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \right|$$

وقتی $۲۷۰^{\circ} < \alpha < ۳۶۰^{\circ}$ باشد $\sin \alpha < 0$ است، پس $\frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} < 0$ و در نتیجه:

$$A = \sin \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

۱۷) اگر $\cos x \sqrt{1 + \tan^2 x} = 1$ و $\frac{\tan x}{1 + \cos x} < 0$ باشد، انتهای کمان مقابل به زاویه x در کدام ناحیه مثلثاتی قرار می‌گیرد؟

(۱) اول

(۲) دوم

(۳) سوم

(۴) چهارم

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

در ابتدا داریم:

$$\cos x \sqrt{1 + \tan^2 x} = \cos x \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos x \times \frac{1}{|\cos x|}$$

که طبق فرض برابر ۱ است.

$$\cos x \times \frac{1}{|\cos x|} = 1 \Rightarrow \cos x > 0$$

از این‌که $\cos x > 0$ است نتیجه می‌گیریم که $1 + \cos x > 0$ است. اما چون $\frac{\tan x}{1 + \cos x} < 0$ است، پس باید $\tan x < 0$.

برای آن‌که هر دو شرط $\cos x > 0$ و $\tan x < 0$ همزمان برقرار باشند، باید انتهای کمان x در ناحیه چهارم باشد.

۱۸) ساده شده عبارت $(\frac{\sin^3 \theta - \sin \theta}{\cos \theta - \cos^3 \theta}) \times (\tan^2 \theta)$ کدام است؟

(۱) $-\tan \theta$

(۳) $\cot \theta$

(۲) $\tan \theta$

(۴) $-\sin \theta \cos \theta$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

ابتدا در صورت کسر از $-\sin \theta$ فاکتور می‌گیریم:

$$(\frac{\sin^3 \theta - \sin \theta}{\cos \theta - \cos^3 \theta}) \times (\tan^2 \theta)$$

$$= \frac{-\sin \theta (1 - \sin^2 \theta)}{\cos \theta (1 - \cos^2 \theta)} \times \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= -\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \times \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\tan \theta$$

۱۹) اگر $0 < x < 90^\circ$ باشد، حاصل عبارت $A = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} - \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ همواره کدام است؟

(۴) $-2 \tan x$

(۳) $-2 \cot x$

(۲) $2 \tan x$

(۱) $2 \cot x$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه‌ی «۲»

ابتدا صورت و مخرج کسر زیر هر رادیکال را در مزدوج مخرج آن ضرب کرده و ساده می‌کنیم، داریم:

$$A = \sqrt{\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}} - \sqrt{\frac{(1-\sin x)(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}}$$

$$A = \sqrt{\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}} - \sqrt{\frac{(1-\sin x)^2}{1-\sin^2 x}}, \quad 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$$

$$A = \frac{|1+\sin x|}{|\cos x|} - \frac{|1-\sin x|}{|\cos x|}$$

چون $0 < x < 90^\circ$ است، پس $\cos x > 0$ ، $1 + \sin x > 0$ و $1 - \sin x > 0$ می‌باشد، در نتیجه قدرمطلق‌ها را بر می‌داریم، پس:

$$A = \frac{1+\sin x}{\cos x} - \frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{1+\sin x - 1 + \sin x}{\cos x} = 2 \tan x$$

۲۰) حاصل عبارت تعریف شده $1 - \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\tan^2 \alpha - 1}}$ همواره کدام است؟

(۴) $\sin^2 \alpha$

(۳) $\frac{1}{\sin^2 \alpha}$

(۲) $\cos^2 \alpha$

(۱) $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

با استفاده از اتحاد مزدوج و اتحاد مثلثاتی $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ داریم:

$$1 - \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\tan^2 \alpha - 1}} = 1 - \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{(\tan^2 \alpha + 1)(\tan^2 \alpha - 1)}}$$

$$= 1 - \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\frac{1}{\cos^2 \alpha} (\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 1)}} = 1 - \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\frac{1}{\cos^2 \alpha} (\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha})}}$$

$$= 1 - \sqrt{\cos^2 \alpha} = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$$

(۲۱) اگر $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \frac{1}{4}$ و انتهای کمان α در ربع دوم مثلثاتی باشد، حاصل $A = |\sin \alpha - \cos \alpha|$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) صفر (۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

طبق اتحاد $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ داریم:

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \underbrace{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}_1^3 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \underbrace{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}_1$$

$$= 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \Rightarrow 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow |\sin \alpha \cos \alpha| = \frac{1}{2}$$

امتهای α در ناحیه دوم
 $\xrightarrow{\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0} \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{2}$

$$A = |\sin \alpha - \cos \alpha| \xrightarrow{\text{توان ۲}} A^2 = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$\xrightarrow{A > 0} A = \sqrt{2}$$

(۲۲) اگر $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ و انتهای کمان زاویه α در ربع دوم باشد، حاصل $\frac{6}{\sin \alpha} - \tan \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{1}$ (۲) $\frac{8}{9}$ (۳) $-\frac{3}{9}$ (۴) $\frac{7}{2}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$$

$$\xrightarrow{\alpha \text{ در ربع دوم}} \sin \alpha = \frac{12}{13}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}$$

$$\frac{6}{\sin \alpha} - \tan \alpha = \frac{6}{\frac{12}{13}} - \left(-\frac{12}{5}\right) = \frac{8}{9}$$

۲۳) با فرض با معنی بودن هر کسر، کدام یک از تساوی‌های زیر برقرار نیست؟

$$(۱) \frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

$$(۲) \frac{1 + \tan x}{1 + \cot x} = \tan x$$

$$(۳) \sin^6 x - \cos^6 x = \sin^2 x - \cos^2 x$$

$$(۴) \frac{1 - \tan x}{\cot x} = \tan^2 x - \tan x$$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$۱) \frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{\cos x(1 + \sin x)}$$

$$= \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{\cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)}$$

$$۲) \frac{1 + \tan x}{1 + \cot x} = \frac{1 + \tan x}{1 + \frac{1}{\tan x}} = \frac{1 + \tan x}{\frac{\tan x + 1}{\tan x}} = \tan x$$

$$۳) \sin^6 x - \cos^6 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$= \sin^2 x - \cos^2 x$$

$$۴) \frac{1 - \tan x}{\cot x} = \frac{1 - \tan x}{\frac{1}{\tan x}} = \tan x - \tan^2 x$$

۲۴) چند مورد از تساوی‌های زیر همواره برقرار است؟

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x \quad (ب)$$

$$\frac{\tan x}{1 + \tan^2 x} = \sin x \cos x \quad (الف)$$

$$\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x} \quad (پ)$$

(۴) صفر

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$(الف) \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \sin x \cdot \cos x$$

$$(ب) \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x)$$

$$= 1 \times ((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x - \sin^2 x \cos^2 x)$$

$$= 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$$

$$(پ) \tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

هر سه تساوی همواره برقرار است.

۲۵) اگر $\frac{\tan x}{1+\cos x} + \frac{\tan x}{1-\cos x} = m$ باشد، حاصل $\sin^2 x + \cos^2 x$ کدام است؟ (مخرج کسرها مخالف صفر است.)

۱ - $\frac{4}{m^2}$ (۲)

۱ - $\frac{1}{m^2}$ (۴)

$\frac{4}{m^2}$ (۱)

$\frac{1}{m^2}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$\frac{\tan x}{1+\cos x} + \frac{\tan x}{1-\cos x} = \tan x \left(\frac{1-\cos x + 1+\cos x}{1-\cos^2 x} \right)$$

$$= \tan x \left(\frac{2}{\sin^2 x} \right) = m \Rightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{m}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{2}{m}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2(\sin x \cos x)^2$$

$$= 1 - 2 \times \frac{4}{m^2} = 1 - \frac{8}{m^2}$$

۲۶) اگر $3 \sin \alpha - 2 \cos \beta = -5$ ، آنگاه حاصل $2 \sin \beta + 3 \cos \alpha$ کدام است؟

(۴) صفر

(۳) -۱

(۲) ۱

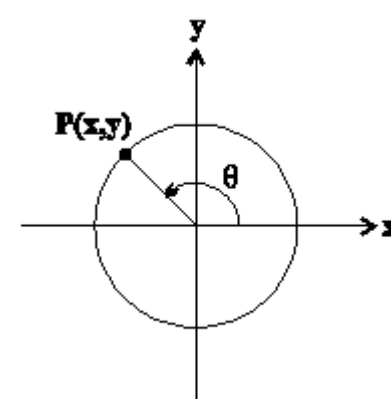
(۱) ۵

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم همواره $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ و $-1 \leq \cos \beta \leq 1$ ، بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} -3 \leq 3 \sin \alpha \leq 3 \\ -2 \leq -2 \cos \beta \leq 2 \end{array} \right\} \xrightarrow{+} -5 \leq 3 \sin \alpha - 2 \cos \beta \leq 5$$

تنها زمانی حاصل $3 \sin \alpha - 2 \cos \beta$ برابر -۵ می‌شود که $\sin \alpha = -1$ و $\cos \beta = 1$ باشد.



$$\begin{cases} y = \sin \theta \\ x = \cos \theta \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

بنابراین برای زوایای α و β داریم:

$$\begin{cases} 1 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = 0 \\ \sin^2 \beta + 1 = 1 \Rightarrow \sin \beta = 0 \end{cases}$$

پس: $2 \sin \beta + 3 \cos \alpha = 0$

۲۷) کدام یک از تساوی‌های زیر نادرست است؟ (تمام عبارت‌ها تعریف شده هستند.)

$$\frac{1+\tan \theta}{1+\cot \theta} = \tan \theta \quad (۲)$$

$$1 - \frac{\cos^2 \theta}{1+\sin \theta} = \sin \theta \quad (۴)$$

$$\frac{\cos \theta}{1+\sin \theta} = \frac{1-\sin \theta}{\cos \theta} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{\cos \theta} + \cot \theta = \frac{\tan \theta + \cos \theta}{\cos \theta} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه‌ی «۳»

گزینه «۱»:

$$\begin{aligned} \text{طرف چپ تساوی} &= \frac{\cos \theta}{1+\sin \theta} \times \frac{1-\sin \theta}{1-\sin \theta} = \frac{\cos \theta(1-\sin \theta)}{1-\sin^2 \theta} \\ &= \frac{\cos \theta(1-\sin \theta)}{\cos^2 \theta} = \frac{1-\sin \theta}{\cos \theta} . \text{ درست است.} \end{aligned}$$

گزینه «۲»:

$$\begin{aligned} \text{طرف چپ تساوی} &= \frac{1+\tan \theta}{1+\cot \theta} = \frac{1+\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{1+\frac{\cos \theta}{\sin \theta}} = \frac{\frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta}} \\ &= \frac{\sin \theta(\sin \theta + \cos \theta)}{\cos \theta(\sin \theta + \cos \theta)} = \tan \theta . \text{ درست است.} \end{aligned}$$

گزینه «۴»:

$$\begin{aligned} \text{طرف چپ تساوی} &= 1 - \frac{\cos^2 \theta}{1+\sin \theta} = 1 - \frac{1-\sin^2 \theta}{1+\sin \theta} = 1 - \frac{(1-\sin \theta)(1+\sin \theta)}{1+\sin \theta} \\ &= 1 - (1 - \sin \theta) = \sin \theta . \text{ درست است.} \end{aligned}$$

تساوی گزینه «۳» برقرار نیست.

۲۸) اگر $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{3}$ باشد، مقدار $\tan^2 x$ کدام است؟

(۴) ۲

(۳) $\frac{1}{۲}$

(۲) $\frac{۳}{۲}$

(۱) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$\begin{aligned} \cos^2 x - \sin^2 x &= (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) \\ &= \cos^2 x + \sin^2 x \\ \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

اگر به جای $\sin^2 x$ قرار دهیم $1 - \cos^2 x$ ، نتیجه می‌شود:

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \frac{1}{3} \Rightarrow 2\cos^2 x = \frac{4}{3} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{۲}{۳}$$

در نتیجه:

$$\Rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{۲}$$

۲۹) اگر $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{23}{32}$ و $135^\circ < x < 180^\circ$ ، آنگاه حاصل $\sin^3 x + \cos^3 x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{5}{4}$ (۲) $-\frac{5}{8}$ (۳) $-\frac{11}{16}$ (۴) $-\frac{5}{16}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x = \frac{23}{32}$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3$$

$$\Rightarrow 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = \frac{23}{32} \Rightarrow -3\sin^2 x \cos^2 x = -\frac{9}{32}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x \times \cos^2 x = \frac{9}{64} \Rightarrow \sin x \cos x = \pm \frac{3}{8}$$

$$\xrightarrow{\text{در ناحیه دوم}} \sin x \cos x = -\frac{3}{8}$$

$$\sin^3 x + \cos^3 x$$

$$= (\sin x + \cos x)^3 - 3\sin x \cos x(\sin x + \cos x)$$

با توجه به اینکه $\sin x \cos x = -\frac{3}{8}$ با فرض اینکه $\sin x + \cos x = A$ باشد، داریم:

$$\sin x + \cos x = A \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = A^2$$

$$\Rightarrow 1 + 2\sin x \cos x = A^2 \Rightarrow 1 + 2\left(-\frac{3}{8}\right) = A^2$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow A = \pm \frac{1}{2} \xrightarrow{135^\circ < x < 180^\circ} A = -\frac{1}{2}$$

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)^3 - 3\sin x \cos x(\sin x + \cos x)$$

$$= -\frac{1}{8} - 3\left(-\frac{3}{8}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} - \frac{9}{16} = -\frac{11}{16}$$

۳۰) اگر $\sin x + \cos x = \frac{3}{4}$ باشد، آنگاه حاصل $A = (1 - \sin x)(1 - \cos x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{32}$ (۲) $\frac{15}{32}$ (۳) $-\frac{1}{32}$ (۴) $-\frac{15}{32}$

پاسخ: گزینه ۱

$$A = (1 - \sin x)(1 - \cos x) = 1 - \sin x - \cos x + \sin x \cos x$$

$$= 1 - (\sin x + \cos x) + \sin x \cos x = 1 - \frac{3}{4} + \sin x \cos x$$

$$= \frac{1}{4} + \sin x \cos x$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + 2\sin x \cos x = \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow 1 + 2\sin x \cos x = \frac{9}{16} \Rightarrow 2\sin x \cos x = -\frac{7}{16}$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{7}{32} \Rightarrow A = \frac{1}{4} + \sin x \cos x = \frac{1}{4} - \frac{7}{32} = \frac{1}{32}$$

۳۱) با فرض $\tan \alpha + \cot \alpha = ۴$ ، حاصل $\sin \alpha \cos \alpha$ کدام است؟

۴) صفر

۳) ۱

۲) $\frac{1}{۴}$

۱) ۴

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{aligned}\tan \alpha + \cot \alpha = ۴ &\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = ۴ \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = ۴ \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = ۴ \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{۴}\end{aligned}$$

۳۲) حاصل عبارت تعریف شده $(\tan^۴ \theta + ۲ \tan^۲ \theta + ۱)(\sin^۴ \theta - ۲ \sin^۲ \theta + ۱)$ کدام است؟

۴) ۱

۳) $۱ + \sin^۲ \theta$

۲) $\cos^۲ \theta$

۱) $\cos^۴ \theta$

پاسخ: گزینه ۴

طبق اتحاد مربع مجموع یا تفاضل دو جمله داریم:

$$\tan^۴ \theta + ۲ \tan^۲ \theta + ۱ = (\tan^۲ \theta + ۱)^۲$$

$$\sin^۴ \theta - ۲ \sin^۲ \theta + ۱ = (\sin^۲ \theta - ۱)^۲$$

حال با توجه به این که $\tan^۲ \theta + ۱ = \frac{1}{\cos^۲ \theta}$ و $\sin^۲ \theta - ۱ = -\cos^۲ \theta$ داریم:

$$(\tan^۲ \theta + ۱)^۲ (\sin^۲ \theta - ۱)^۲ = \frac{1}{\cos^۴ \theta} (-\cos^۲ \theta)^۲ = \frac{\cos^۴ \theta}{\cos^۴ \theta} = ۱$$